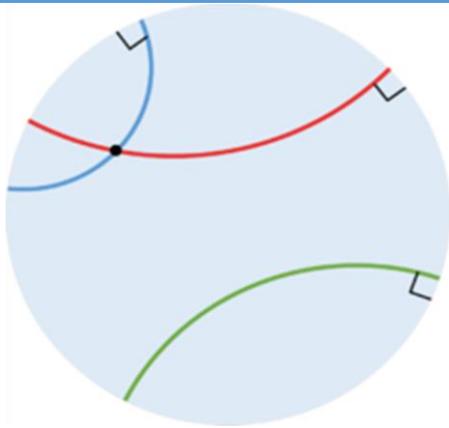


Article « Géométrie non euclidienne », *Wikipedia*, Novembre 2016. Une approche intuitive de la géométrie non euclidienne.

En 1902, Henri Poincaré propose un modèle simple dans lequel le cinquième postulat d'Euclide n'est pas valable. La droite est ici définie par extension comme la courbe de plus court chemin qui joint deux points de l'espace considéré.

« Supposons, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes : la température n'y est pas uniforme ; elle est maximum au centre et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé. Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit, à mesure qu'on se rapprochera du cercle limite. Observons d'abord que si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci en effet veulent se rapprocher en effet du cercle limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Leurs pas deviennent donc de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre ce cercle limite. »

Voici une approche intuitive de la géométrie non euclidienne.



— Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, 1902.

Étienne Ghys commente ce texte de la façon suivante :

« Les êtres qui habitent dans ce monde ne peuvent pas savoir qu'ils rapetissent car s'ils se mesurent avec un mètre ruban, le mètre ruban également se rapetisse. Nous savons qu'ils se rapetissent mais eux ont une vie tout à fait normale et tout à fait cohérente.

S'ils veulent aller d'un point à un autre par le plus court chemin, nous pensons qu'ils auront tendance à se rapprocher du centre, car leurs pas sont plutôt plus grands vers le centre.

Alors on peut démontrer que le plus court chemin d'un point à un autre dans cette géométrie imaginaire est un arc de cercle perpendiculaire au cercle limite. Leurs droites à eux sont nos cercles à nous. Et vous voyez que dans leur géométrie, l'axiome d'Euclide n'est pas satisfait. La droite rouge est parallèle à la droite verte mais la droite bleue l'est également (deux droites qui ne se coupent pas sont en effet parallèles).

Il y a une infinité de parallèles qui passent par un point. Et ces gens sont raisonnables, ils ne savent pas qu'ils rapetissent. Mais ils sont tout aussi raisonnables que nous qui ignorons probablement beaucoup d'autres choses.

La morale de cette petite histoire de Poincaré est qu'on peut très bien envisager beaucoup de mondes extrêmement raisonnables, chacun ayant sa géométrie, chacun ayant sa logique et qui chacun peuvent nous apporter une vision de notre monde concret [...].

Le mathématicien d'aujourd'hui pour résoudre un problème, pour étudier une question, va utiliser une géométrie, va prendre sa boîte à outil, et va choisir la géométrie la plus convenable pour comprendre le problème étudié.

Voici la phrase de Poincaré : Une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre, elle peut simplement être plus commode. »

— Étienne Ghys¹